第28卷 第3期
2011年06月

工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 28 No. 3
June 2011

文章编号:1005-3085(2011)03-0343-11

一类自催化反应系统的Hopf分歧与稳定性*

马晓丽

(西安工业大学数理系，西安 710032)

摘 要: 本文考虑一类带饱和项的自催化反应系统．我们首先讨论了常微分系统Hopf分歧的存在性，得到了渐近稳定的周期解．其次讨论了具有扩散项的偏微分系统，在扩散系数满足一定的条件下，得到了次临界的Hopf分歧的存在性，并且利用中心流形约化方法，判断出由该Hopf分歧产生的空间齐次的周期解是渐近稳定的．最后，借助Matlab软件形象地验证和刻画了文中的结论．

关键词: 自催化；Hopf分歧；稳定性；扩散项

分类号: **AMS**(2000) 35K57　　**中图分类号**: O175.26　　**文献标识码**: A

1 引言

本文在Neumman边界条件下考虑一类带饱和项的自催化反应系统

$$\begin{cases} u_t-d_1\Delta u=\lambda uv-\frac{u}{1+ku}, & x\in\Omega,\quad t>0,\\ v_t-d_2\Delta v=1-uv, & x\in\Omega,\quad t>0,\\ \partial_\nu u=\partial_\nu v=0, & x\in\partial\Omega,\ t>0,\\ u(x,0)=u_0(x)\geq 0,\ \not\equiv 0,\quad v(x,0)=v_0(x)\geq 0,\ \not\equiv 0, & x\in\overline{\Omega}, \end{cases} \tag{1}$$

其中Ω是$R^n(n\geq 1)$中具有光滑边界的有界开区域，u, v分别代表两种反应物的浓度，d_1,d_2为扩散系数，λ, k为代表反应率的系数，并且$\lambda, k>0$．关于系统(1)的建立及相关的化学背景，有兴趣的读者可参见文献[1,2]．

对于系统(1)的研究目前已有不少工作．在Dirichlet边界条件下，文献[3]利用分歧理论给出了正平衡态解的存在性，并刻画了解的长时行为；文献[4]考虑了参数λ或k充分大的情形，利用正则摄动和奇异摄动理论，给出了正平衡态解的多重性和惟一性结果．在Neumman边界条件下，文献[5]利用不动点指标理论给出了非常数正平衡态解的存在性和不存在性，所得结果表明扩散系数及反应器的大小在空间斑图的形成中起很大作用．

Hopf分歧现象一直是国内外学者关注的热点问题．文献[6]利用Hopf分歧理论研究了一类扩散的捕食-食饵模型的Hopf分歧，给出了空间非齐次的周期解的存在性及稳定性．关于Hopf分歧的研究，有兴趣的读者可参见文献[7,8]．

大量的文献表明，对系统(1) Hopf分歧的研究目前并不多．鉴于此，本文主要考虑自催化反应系统(1) Hopf分歧的存在性、方向及稳定性．同时，借助Matlab软件，从数值模拟的角度验证并加强了所得结论．

收稿日期: 2009-09-08. **作者简介**: 马晓丽(1972年5月生)，女，讲师. 研究方向：数理金融与微分方程.
***基金项目**: 国家自然科学基金(10971124).

当$0<\lambda<k^{-1}$时，系统(1)存在惟一正常数平衡解

$$(u^*,v^*)=\Big(\frac{\lambda}{1-\lambda k},\frac{1-\lambda k}{\lambda}\Big).$$

以下均假设$0<\lambda<k^{-1}$.

2 常微分系统的Hopf分歧及稳定性

考虑动力系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\lambda uv-\dfrac{u}{1+ku}, & t>0,\\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=1-uv, & t>0.\end{cases} \tag{2}$$

经计算，系统(2)在(u^*,v^*)处的雅可比矩阵为

$$J:=\begin{pmatrix}\lambda k(1-\lambda k) & \frac{\lambda^2}{1-\lambda k}\\ -\frac{1-\lambda k}{\lambda} & -\frac{\lambda}{1-\lambda k}\end{pmatrix}. \tag{3}$$

设其特征方程为$\mu^2-T\mu+D=0$，其中

$$T:=\mathrm{tr}J=\frac{\lambda(\lambda^2k^3-2\lambda k^2+k-1)}{1-\lambda k},\quad D:=\mathrm{det}J=\lambda(1-\lambda k)>0.$$

令$f(\lambda)=\lambda^2k^3-2\lambda k^2+k-1$，由求根公式解得$f(\lambda)=0$的两根为

$$\lambda_0=k^{-\frac{3}{2}}\big(\sqrt{k}-1\big),\quad \lambda_1=k^{-\frac{3}{2}}\big(\sqrt{k}+1\big).$$

当$0<k\le 1$时，$f(\lambda)<0$，即有$\mathrm{tr}J<0$，因此(u^*,v^*)局部渐近稳定.

定理1 若$k>1$，则有以下结论成立：

(i) 当$0<\lambda<\lambda_0$时，(u^*,v^*)不稳定；当$\lambda_0<\lambda<k^{-1}$时，(u^*,v^*)局部渐近稳定；

(ii) 当$\lambda=\lambda_0$时，系统(2)在平衡点(u^*,v^*)处产生Hopf分歧，且该Hopf分支为次临界方向，并且周期闭轨渐近稳定.

证明 若$k>1$，则有$0<\lambda_0<k^{-1}<\lambda_1$. 由于当$0<\lambda<\lambda_0$时，$f(\lambda)>0$，即有$\mathrm{tr}J>0$. 又因$\mathrm{det}J>0$，所以特征方程存在正实部的特征值，故此时$(u^*,v^*)$不稳定；而当$\lambda_0<\lambda<k^{-1}$时，$f(\lambda)<0$，即有$\mathrm{tr}J<0$，此时特征方程存在两个负实部的特征值，$(u^*,v^*)$局部渐近稳定.

设$\mu=\alpha(\lambda)\pm\mathrm{i}\beta(\lambda)$为特征方程的两个根，则有

$$\alpha(\lambda)=\frac{\lambda(\lambda^2k^3-2\lambda k^2+k-1)}{2(1-\lambda k)},\quad \beta(\lambda)=\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda(1-\lambda k)-\frac{\lambda^2(\lambda^2k^3-2\lambda k^2+k-1)^2}{(1-\lambda k)^2}}.$$

经计算

$$\alpha(\lambda_0)=0,\quad \alpha'(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_0}=-\lambda_0k^2<0.$$

根据Poincaré-Andronov-Hopf分歧定理[9]可知，当$\lambda=\lambda_0$时，系统(2)在平衡点(u^*,v^*)处产生Hopf分歧.

令 $\widetilde{u}=u-u^*$, $\widetilde{v}=v-v^*$. 为了方便，仍用 u, v 表示 $\widetilde{u}, \widetilde{v}$，那么系统 (2) 可变换为

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G^1(u,v,\lambda) \\ G^2(u,v,\lambda) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

其中

$$G^1(u,v,\lambda) = k(1-\lambda k)^3u^2 + \lambda uv - k^2(1-\lambda k)^4u^3 + \mathcal{O}\big(|u|^4, |u|^3|v|\big),$$
$$G^2(u,v,\lambda) = -uv + \mathcal{O}\big(|u|^4, |u|^3|v|\big).$$

作变换

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

其中

$$M = -\frac{\lambda^2k^3 - 2\lambda k^2 + k + 1}{2\lambda}, \quad N = -\frac{1-\lambda k}{2\lambda^2}\sqrt{4D-T^2}.$$

代入 (4) 可得

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\lambda) & -\beta(\lambda) \\ \beta(\lambda) & \alpha(\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F^1(x,y,\lambda) \\ F^2(x,y,\lambda) \end{pmatrix},$$

其中

$$F^1(x,y,\lambda) = A_{20}x^2 + A_{11}xy + A_{21}x^2y + A_{30}x^3 + \mathcal{O}\big(|x|^4, |x|^3|y|\big),$$
$$F^2(x,y,\lambda) = -\frac{M}{N}F^1(x,y,\lambda) - (Mx^2 + Nxy)\frac{1}{N},$$
$$A_{20} = k(1-\lambda k)^3 + \lambda M, \quad A_{11} = \lambda N, \quad A_{21} = 0, \quad A_{30} = -k^2(1-\lambda k)^4.$$

下面通过判断 $a(\lambda_0)$ 的符号来讨论周期解的方向及稳定性．由文献 [10] 知

$$\begin{aligned} a(\lambda_0) \;=\; & \frac{1}{16}\big[F^1_{xxx} + F^1_{xyy} + F^2_{xxy} + F^2_{yyy}\big] \\ & + \frac{1}{16\beta(\lambda_0)}\big[F^1_{xy}(F^1_{xx} + F^1_{yy}) - F^2_{xy}(F^2_{xx} + F^2_{yy}) - F^1_{xx}F^2_{xx} + F^1_{yy}F^2_{yy}\big], \end{aligned}$$

这里各导数均为导函数在 $(0,0,\lambda_0)$ 处的导数值．根据 $F^1(x,y,\lambda)$, $F^2(x,y,\lambda)$ 的表达式，显然有

$$F^1_{xyy} = F^2_{xxy} = F^2_{yyy} = F^1_{yy} = F^2_{yy} = 0.$$

注意到 $\lambda_0 k = 1 - k^{-\frac{1}{2}}$，进一步计算得

$$F^1_{xxx} = 6A_{30}|_{\lambda=\lambda_0} = -6k^2(k^{-\frac{1}{2}})^4 = -6,$$

$$F^1_{xy} = A_{11}|_{\lambda=\lambda_0} = \lambda_0 N_0, \quad F^2_{xy} = -1 - \lambda_0 M_0 = 0,$$

$$F^1_{xx} = 2A_{20}|_{\lambda=\lambda_0} = 2(k^{-\frac{1}{2}} + \lambda_0 M_0) = -2\lambda_0 k,$$

$$F^2_{xx} = -\frac{2M}{N}(A_{20}+1)|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{2}{N_0}\lambda_0^{-1}k^{-\frac{1}{2}},$$

其中

$$M_0 := M|_{\lambda=\lambda_0} = -\lambda_0^{-1}, \quad N_0 := N|_{\lambda=\lambda_0} = -\frac{1-\lambda_0 k}{\lambda_0^2}\sqrt{\lambda_0(1-\lambda_0 k)}.$$

将其代入 $a(\lambda_0)$ 的表达式，整理得

$$\begin{aligned} a(\lambda_0) &= \frac{1}{16}F^1_{xxx} + \frac{1}{16\beta(\lambda_0)}\left[F^1_{xy}F^1_{xx} - F^1_{xx}F^2_{xx}\right] \\ &= -\frac{3}{8} - \frac{1}{8\beta(\lambda_0)}\lambda_0 k\Big(\lambda_0 N_0 - \frac{2}{N_0}\lambda_0^{-1}k^{-\frac{1}{2}}\Big) \\ &= -\frac{3}{8} - \frac{1}{8}\lambda_0 k\lambda_0^{-\frac{1}{2}}(1-\lambda_0 k)^{-\frac{1}{2}}\Big(-\lambda_0^{-\frac{1}{2}}(1-\lambda_0 k)^{\frac{3}{2}} + 2\lambda_0^{\frac{1}{2}}k(1-\lambda_0 k)^{\frac{3}{2}}\Big) \\ &= -\frac{3}{8} - \frac{1}{8}(2k\lambda_0 - 1)\sqrt{k} = -\frac{1+\sqrt{k}}{8} < 0. \end{aligned}$$

注意到 $\alpha'(\lambda_0) < 0$. 因此由Poincaré-Andronov-Hopf分歧定理知，该Hopf分歧为次临界方向，且周期闭轨渐近稳定.

3 扩散系统的Hopf分歧及稳定性

在常微分系统讨论的基础上，考虑带扩散的动力系统

$$\begin{cases} u_t - d_1 u_{xx} = \lambda uv - \frac{u}{1+ku}, & x\in(0,\pi), \quad t>0, \\ v_t - d_2 v_{xx} = 1 - uv, & x\in(0,\pi), \quad t>0, \\ u_x = v_x = 0, & x = 0,\pi, \quad t>0. \end{cases} \tag{5}$$

令

$$X = \big\{(u,v)\in H^2(0,\pi)\times H^2(0,\pi) : u_x = v_x = 0,\ x = 0,\pi\big\}, \quad X_{\mathbb{C}} = X + \mathrm{i}X.$$

系统 (5) 在 (u_*, v_*) 处定义在 $X_{\mathbb{C}}$ 上的线性化算子具有形式

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = L(\lambda)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := D\begin{pmatrix} u_{xx} \\ v_{xx} \end{pmatrix} + J\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

其中 $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2)$，$J$ 由 (3) 给出.

我们知道，特征值问题 $-\phi_{xx} = \mu\phi$, $x\in(0,\pi)$, $\phi_x = 0$, $x = 0,\pi$ 具有一序列简单特征值 $\mu_n = n^2\,(n = 0,1,2,\cdots)$，对应的特征函数为

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}, & n = 0, \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cos(nx), & n > 0. \end{cases}$$

考虑 L 的特征方程

$$L\begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}.$$

令

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \cos(nx),$$

代入特征方程得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(J_n(\lambda) - \mu I\right) \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \cos(nx) = 0,$$

其中

$$J_n(\lambda) := J - \mu_n D = \begin{pmatrix} \lambda k(1-\lambda k) - d_1\mu_n & \frac{\lambda^2}{1-\lambda k} \\ -\frac{1-\lambda k}{\lambda} & -\frac{\lambda}{1-\lambda k} - d_2\mu_n \end{pmatrix}.$$

令 $|J_n(\lambda) - \mu I| = 0$，则 $L(\lambda)$ 的特征方程为

$$\mu^2 - T_n\mu + D_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

其中

$$T_n = \frac{\lambda(\lambda^2k^3 - 2\lambda k^2 + k - 1)}{1-\lambda k} - (d_1+d_2)\mu_n,$$

$$D_n = \lambda(1-\lambda k) + d_1d_2\mu_n^2 + \frac{d_1\lambda}{1-\lambda k}\mu_n - d_2\lambda k(1-\lambda k)\mu_n.$$

定理 2 设 $0 < k \le 1$. 若 d_1, d_2 满足 $d_1 \ge \lambda k(1-\lambda k)$ 或 $d_1/d_2 \ge k(1-\lambda k)^2$，则系统 (5) 的惟一正常数解 (u_*, v_*) 渐近稳定.

证明 只需说明对任意 $j \ge 0$, $T_j(\lambda) < 0$, $D_j(\lambda) > 0$. 当 $0 < k \le 1$ 时，$T_0(\lambda) < 0$. 因此 $T_j(\lambda) \le T_0(\lambda) < 0$. 若 $d_1 \ge \lambda k(1-\lambda k)$，则对任意 $j \ge 0$，有

$$D_j(\lambda) = \lambda(1-\lambda k) + d_2\mu_j\left[d_1\mu_j - \lambda k(1-\lambda k)\right] + \frac{d_1\lambda}{1-\lambda k}\mu_j > 0.$$

若 $d_1/d_2 \ge k(1-\lambda k)^2$，则对任意 $j \ge 0$，有

$$D_j(\lambda) = \lambda(1-\lambda k) + d_1d_2\mu_j^2 + \frac{\lambda}{1-\lambda k}\left[d_1 - d_2k(1-\lambda k)^2\right]\mu_j > 0.$$

当 $k > 1$ 时，经计算知

$$T_0(\lambda_0) = 0, \quad D_0(\lambda_0) > 0, \quad \alpha(\lambda_0) = 0, \quad \alpha'(\lambda_0) < 0, \quad T_j(\lambda_0) < T_0(\lambda_0) = 0, \quad j > 0.$$

注意到 $\lambda_0 = k^{-\frac{3}{2}}(\sqrt{k} - 1)$. 若 $d_1 \ge k^{-1}(\sqrt{k}-1)$ 或 $d_1 \ge d_2$，则当 $j > 0$ 时，有

$$\begin{aligned} D_j(\lambda_0) &= \lambda_0(1-\lambda_0k) + d_1d_2\mu_j^2 + \lambda_0k^{\frac{1}{2}}d_1\mu_j - \lambda_0k^{\frac{1}{2}}d_2\mu_j \\ &= \lambda_0(1-\lambda_0k) + d_2\mu_j(d_1\mu_j - \lambda_0k^{\frac{1}{2}}) + \lambda_0k^{\frac{1}{2}}d_1\mu_j > 0, \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} D_j(\lambda_0) &= \lambda_0(1-\lambda_0k) + d_1d_2\mu_j^2 + \lambda_0k^{\frac{1}{2}}d_1\mu_j - \lambda_0k^{\frac{1}{2}}d_2\mu_j \\ &= \lambda_0(1-\lambda_0k) + d_1d_2\mu_j^2 + \lambda_0k^{\frac{1}{2}}(d_1-d_2)\mu_j > 0. \end{aligned}$$

因此 $L(\lambda_0)$ 除一对共轭纯虚数特征值外，其他特征值均具有负实部．由文献 [9] 中的 Hopf 分歧定理知，系统 (5) 在 $(\lambda_0; u_*, v_*)$ 处产生 Hopf 分歧.

定理 3 设 $k > 1$．若 $d_1 \geq k^{-1}(\sqrt{k}-1)$ 或 $d_1 \geq d_2$，则系统 (5) 在 (u_*, v_*, λ_0) 处产生 Hopf 分歧，且该 Hopf 分歧为次临界的，周期闭轨渐近稳定，其中 $\lambda_0 = k^{-\frac{3}{2}}(\sqrt{k}-1)$.

证明 利用文献 [6,9] 中的方法来讨论 Hopf 分歧的方向与稳定性.

定义 $L^*(\lambda_0)$ 是线性化算子 $L(\lambda_0)$ 的伴随算子

$$L^*(\lambda_0)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := D\begin{pmatrix} u_{xx} \\ v_{xx} \end{pmatrix} + J^*\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

其中

$$J^* = \begin{pmatrix} \lambda_0 k^{\frac{1}{2}} & -\lambda_0^{-1} k^{-\frac{1}{2}} \\ \lambda_0^2 k^{\frac{1}{2}} & -\lambda_0 k^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

令

$$q := \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda_0^{-1} + \mathrm{i}\,\lambda_0^{-\frac{3}{2}} k^{-\frac{3}{4}} \end{pmatrix}, \quad q^* := \begin{pmatrix} a_0^* \\ b_0^* \end{pmatrix} = \frac{\lambda_0^{\frac{3}{2}} k^{\frac{3}{4}}}{2\pi}\begin{pmatrix} \lambda_0^{-\frac{3}{2}} k^{-\frac{3}{4}} + \mathrm{i}\,\lambda_0^{-1} \\ \mathrm{i} \end{pmatrix},$$

则 q, q^* 满足 $L(\lambda_0)q = \mathrm{i}\beta_0 q$，$L^*(\lambda_0)q^* = -\mathrm{i}\beta_0 q^*$，$\langle q^*, q\rangle = 1$，$\langle q^*, \overline{q}\rangle = 0$，其中

$$\beta_0 := \beta(\lambda_0) = \lambda_0^{\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{4}}, \quad \langle a, b\rangle = \int_0^\pi \overline{a}^{\mathrm{T}} b \,\mathrm{d}x$$

表示 $L^2(0,\pi) \times L^2(0,\pi)$ 中的内积．令

$$f(u,v,\lambda) = \lambda uv - \frac{u}{1+ku}, \quad g(u,v,\lambda) = 1 - uv.$$

在 (u_*, v_*, λ_0) 处计算得

$$f_{uu} = 2k(1-\lambda_0 k)^3 = 2k^{-\frac{1}{2}}, \quad f_{uv} = \lambda_0, \quad f_{vv} = 0,$$
$$f_{uuu} = -6k^2(1-\lambda_0 k)^4 = -6, \quad f_{uuv} = 0, \quad f_{uvv} = 0, \quad f_{vvv} = 0,$$
$$g_{uu} = 0, \quad g_{uv} = -1, \quad g_{vv} = 0, \quad g_{uuu} = g_{uuv} = g_{uvv} = g_{vvv} = 0.$$

定义

$$Q_{qq} = \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix}\cos^2(nx), \quad Q_{q\bar{q}} = \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix}\cos^2(nx), \quad C_{qq\bar{q}} = \begin{pmatrix} g_n \\ h_n \end{pmatrix}\cos^3(nx),$$

其中

$$c_n = f_{uu}a_n^2 + 2f_{uv}a_n b_n + f_{vv}b_n^2, \quad d_n = g_{uu}a_n^2 + 2g_{uv}a_n b_n + g_{vv}b_n^2,$$
$$e_n = f_{uu}|a_n|^2 + f_{uv}(a_n\bar{b}_n + \bar{a}_n b_n) + f_{vv}|b_n|^2,$$
$$f_n = g_{uu}|a_n|^2 + g_{uv}(a_n\bar{b}_n + \bar{a}_n b_n) + g_{vv}|b_n|^2,$$
$$g_n = f_{uuu}|a_n|^2 a_n + f_{uuv}\big(2|a_n|^2 b_n + a_n^2\bar{b}_n\big) + f_{uvv}\big(2|b_n|^2 a_n + b_n^2\bar{a}_n\big) + f_{vvv}|b_n|^2 b_n,$$
$$h_n = g_{uuu}|a_n|^2 a_n + g_{uuv}\big(2|a_n|^2 b_n + a_n^2\bar{b}_n\big) + g_{uvv}\big(2|b_n|^2 a_n + b_n^2\bar{a}_n\big) + g_{vvv}|b_n|^2 b_n.$$

当$n=0$时，有

$$Q_{qq}=\begin{pmatrix}2(k^{-\frac{1}{2}}-1+\mathrm{i}\lambda_0^{-\frac{1}{2}}k^{-\frac{3}{4}})\\2(\lambda_0^{-1}-\mathrm{i}\lambda_0^{-\frac{3}{2}}k^{-\frac{3}{4}})\end{pmatrix},\quad Q_{q\bar{q}}=\begin{pmatrix}2(k^{-\frac{1}{2}}-1)\\2\lambda_0^{-1}\end{pmatrix},\quad C_{qq\bar{q}}=\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}.$$

进一步计算得$\langle q^*,C_{qq\bar{q}}\rangle=-3+3\lambda_0^{\frac{1}{2}}k^{\frac{3}{4}}$，及

$$\langle q^*,Q_{qq}\rangle=k^{-\frac{1}{2}}-1+\mathrm{i}\lambda_0^{-\frac{1}{2}}k^{-\frac{3}{4}}-\mathrm{i}\lambda_0^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{4}},\quad \langle q^*,Q_{q\bar{q}}\rangle=k^{-\frac{1}{2}}-1-\mathrm{i}\lambda_0^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{4}},$$

$$\langle \bar{q}^*,Q_{qq}\rangle=k^{-\frac{1}{2}}-1+\mathrm{i}\lambda_0^{-\frac{1}{2}}k^{-\frac{3}{4}}+\mathrm{i}\lambda_0^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{4}},\quad \langle \bar{q}^*,Q_{q\bar{q}}\rangle=k^{-\frac{1}{2}}-1+\mathrm{i}\lambda_0^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{4}}.$$

定义

$$\hat{q}:=\big[2\mathrm{i}\beta_0I-L(\lambda_0)\big]^{-1}w_{20},\quad \tilde{q}:=-\big[L(\lambda_0)\big]^{-1}w_{11},$$

其中

$$w_{20}=Q_{qq}-\langle q^*,Q_{qq}\rangle q-\langle \bar{q}^*,Q_{qq}\rangle\bar{q},\quad w_{11}=Q_{q\bar{q}}-\langle q^*,Q_{q\bar{q}}\rangle q-\langle \bar{q}^*,Q_{q\bar{q}}\rangle\bar{q}.$$

经计算，$w_{20}=0$，$w_{11}=0$，从而有$\langle q^*,Q_{\tilde{q}q}\rangle=\langle q^*,Q_{\hat{q}\bar{q}}\rangle=0$.

由文献[9]知，Hopf分歧的方向由$\mathrm{Re}(c_1(\lambda_0))$的符号所决定，其中

$$c_1(\lambda_0)=\frac{\mathrm{i}}{2\beta_0}\langle q^*,Q_{qq}\rangle\cdot\langle q^*,Q_{q\bar{q}}\rangle+\langle q^*,Q_{\tilde{q}q}\rangle+\frac{1}{2}\langle q^*,Q_{\hat{q}\bar{q}}\rangle+\frac{1}{2}\langle q^*,C_{qq\bar{q}}\rangle.$$

由前面计算得

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\big(c_1(\lambda_0)\big)&=\frac{\mathrm{i}}{2\beta_0}\mathrm{Im}\big[\langle q^*,Q_{qq}\rangle\cdot\langle q^*,Q_{q\bar{q}}\rangle\big]-\frac{3}{2}\\&=\mathrm{i}\Big(-\mathrm{i}\lambda_0^{\frac{1}{2}}k^{-\frac{1}{4}}+\mathrm{i}\lambda_0^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\lambda_0^{-\frac{1}{2}}k^{-\frac{5}{4}}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\lambda_0^{-\frac{1}{2}}k^{-\frac{3}{4}}\Big)\lambda_0^{-\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{4}}-\frac{3}{2}\\&=-\frac{1}{2}-k^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\lambda_0^{-1}k^{-1}+\frac{1}{2}\lambda_0^{-1}k^{-\frac{1}{2}}\\&=-\frac{1}{2}-k^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\lambda_0^{-1}k^{-1}(k^{\frac{1}{2}}-1)\\&=-\frac{1}{2}-k^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\big[k^{-\frac{1}{2}}(k^{\frac{1}{2}}-1)\big]^{-1}(k^{\frac{1}{2}}-1)\\&=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k^{\frac{1}{2}}<0.\end{aligned}$$

由文献[6,9]知，若

$$\frac{1}{\alpha'(\lambda_0)}\mathrm{Re}\big(c_1(\lambda_0)\big)<0,$$

则Hopf分歧方向是超临界的；若

$$\frac{1}{\alpha'(\lambda_0)}\mathrm{Re}\big(c_1(\lambda_0)\big)>0,$$

则Hopf分歧方向是次临界的；并且若$L(\lambda_0)$其他所有特征值均具有负实部，则当$\mathrm{Re}(c_1(\lambda_0))<0$时，周期解渐近稳定；当$\mathrm{Re}(c_1(\lambda_0))>0$时，周期解不稳定. 注意到$\alpha'(\lambda_0)<0$，因此该Hopf分歧方向是次临界的，且由该Hopf分歧产生的周期解渐近稳定.

注 1 对于扩散系统 (5)，我们只是得到了空间齐次的 Hopf 分歧周期解 (对应于 $n=0$ 的模式)，该系统是否存在非齐次的周期解有待于进一步的研究．事实上，空间齐次的周期解与常微分系统中产生的周期解是一致的．但是，对于扩散系统，Hopf 分歧产生的条件要求苛刻，周期解稳定性的判断也更为困难．

4 数值模拟

这一节，我们利用 Matlab 软件给出数值模拟结果，以验证定理 1 至定理 3 中的结果．

常微分系统包含两个参数：λ, k．选取 $k=4>1$，那么临界值 $\lambda_0=0.125$．由定理 1 知，当 $\lambda=\lambda_0$ 时，系统 (2) 产生次临界的 Hopf 分歧，且该 Hopf 分歧周期解渐近稳定，选取 $\lambda=0.12$，见图 1 左．大量的数值模拟表明，当 $\lambda>\lambda_0$ 时，(u_*,v_*) 整体渐近稳定，选取 $\lambda=0.15$，见图 1 右．

偏微分系统包含四个参数：d_1, d_2, λ, k．首先考虑 $0<k\le 1$ 情形．选取 $k=0.8$．由定理 2 知，若 $d_1\ge 0.16$ 或 $d_1/d_2\ge 0.032$，则 (u_*,v_*) 渐近稳定．选取 $\lambda=1$，$d_1=0.2$，$d_2=10$，见图 2．大量的数值模拟表明，当 $0<k\le 1$ 时，系统 (5) 不会产生 Hopf 分歧．并且发现，当 d_1/d_2 充分小时，系统 (2) 存在稳定的非常数正平衡态解，选取 $\lambda=1$，$d_1=0.01$，$d_2=10$，见图 3．

其次，考虑 $k>1$ 的情形．选取 $k=4$，那么临界值 $\lambda_0=0.125$．由定理 3 知，若 $d_1\ge 0.25$ 或 $d_1\ge d_2$，则当 $\lambda=\lambda_0$ 时，系统 (5) 产生次临界的 Hopf 分歧，且该 Hopf 分歧周期解渐近稳定．不妨选取 $d_1=0.02$，$d_2=0.01$．若取 $\lambda=0.12<\lambda_0$，系统 (5) 存在稳定的空间齐次的 Hopf 分歧周期解，见图 4．若取 $\lambda=0.05<0.12<\lambda_0$，系统 (5) 仍存在稳定的 Hopf 分歧周期解，并且周期变大，见图 5．若取 $\lambda=0.23>\lambda_0$，大量的数值模拟表明 $(u_*,v_*)=(2.875,0.348)$ 渐近稳定，见图 6．并且我们发现，当 d_1/d_2 充分小，系统 (5) 存在空间非齐次的周期解，选取 $\lambda=0.23>\lambda_0$，$d_1=0.01$，$d_2=10$，见图 7．

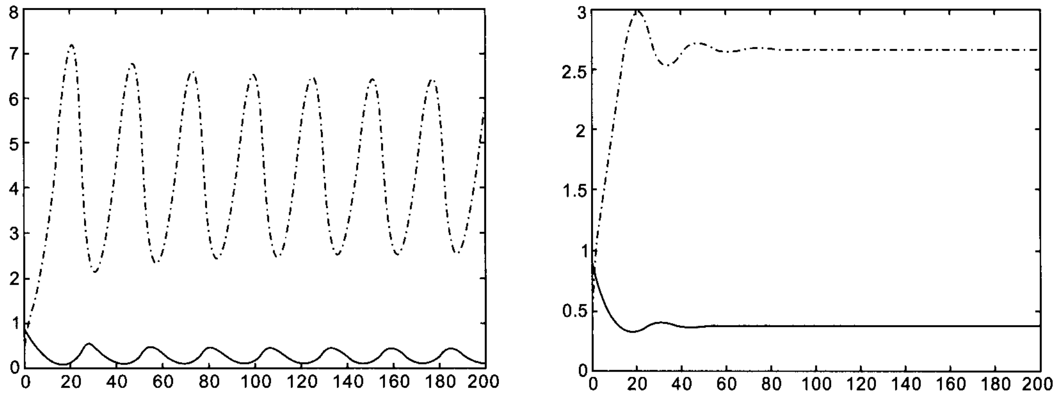

图 1: 参数 $k=4>1$，$\lambda=0.12$，系统 (2) 存在稳定的 Hopf 分歧周期解 (左)；
$\lambda=0.15$，(u_*,v_*) 渐近稳定 (右)，下曲线 $u(t)$，上曲线 $v(t)$

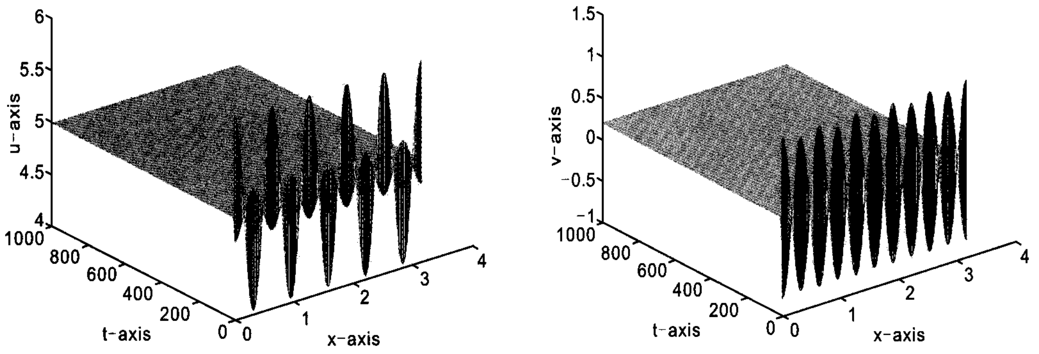

图 2:　参数 $k = 0.8 < 1$, $\lambda = 1$, $d_1 = 0.2 > 0.16$, $d_2 = 10$,
正常数平衡解 $(u_*, v_*) = (5, 0.2)$ 渐近稳定

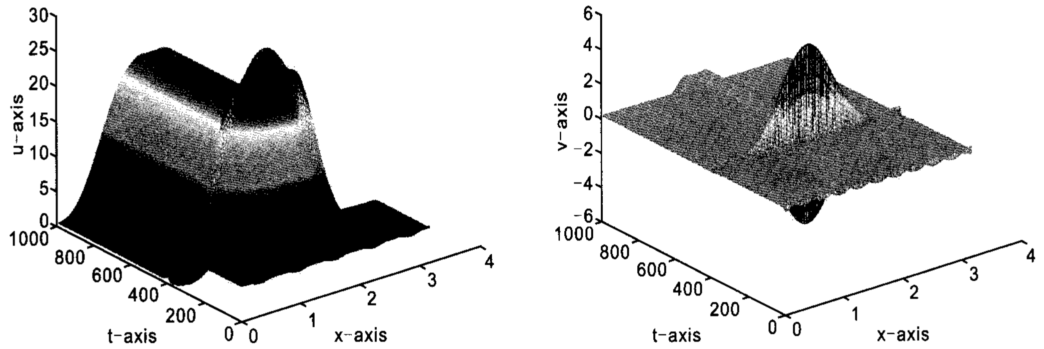

图 3:　参数 $k = 0.8 < 1$, $\lambda = 1$, $d_1 = 0.01$, $d_2 = 10$，正常数平衡解 (u_*, v_*) 不稳定，
系统 (5) 存在稳定的非常数正平衡解

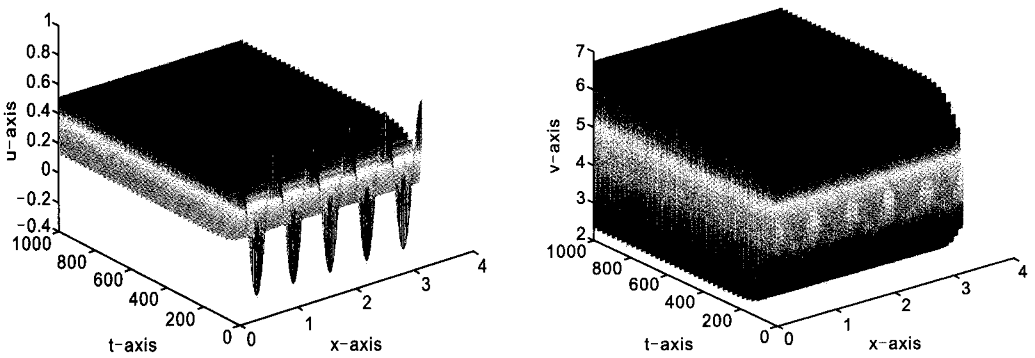

图 4:　参数 $k = 4 > 1$, $\lambda = 0.12 < 0.125$, $d_1 = 0.02$, $d_2 = 0.01$,
系统 (5) 存在稳定的 Hopf 分歧周期解

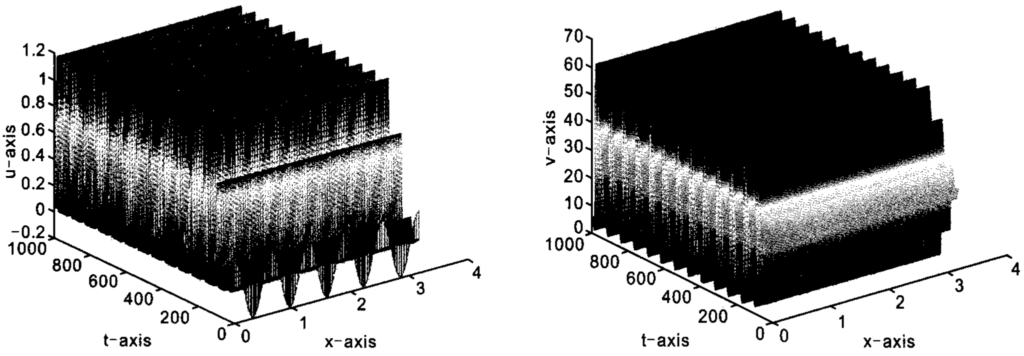

图 5: 参数 $k = 4 > 1$, $\lambda = 0.05 < 0.12 < \lambda_0$, $d_1 = 0.02$, $d_2 = 0.01$,
系统 (5) 存在稳定的 Hopf 分歧周期解，且相比图 4 周期增大

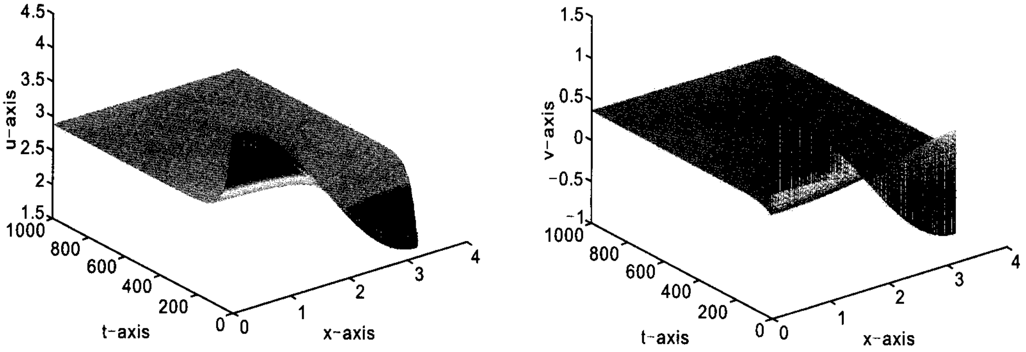

图 6: 参数 $k = 4 > 1$, $\lambda = 0.23 > 0.125$, $d_1 = 0.02$, $d_2 = 0.01$,
正常数平衡解 $(u_*, v_*) = (2.875, 0.348)$ 渐近稳定

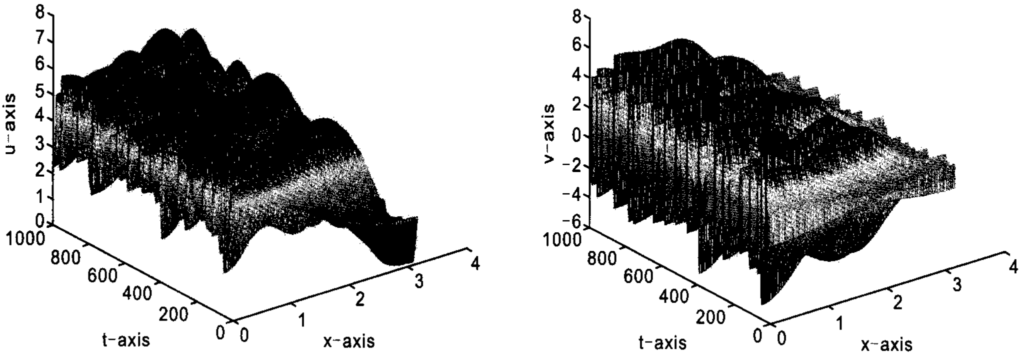

图 7: 参数 $k = 4 > 1$, $\lambda = 0.23 > 0.125$, $d_1 = 0.01$, $d_2 = 10$,
系统 (5) 存在不稳定的空间非齐次的 Hopf 分歧周期解

参考文献：

[1] Ibanez J L, Velarde M G. Multiple steady states in a simple reaction-diffusion model with Michaelis-Menten (first-order Hinshelwood-Langmuir) saturation law: the limit of large separation in the two diffusion constants[J]. Journal of Mathematical Physics, 1978, 19: 151-156

[2] Bonilla L L, Velarde M G. Singular perturbations approach to the limit cycle and global patterns in a nonlinear diffusion-reaction problem with autocatalysis and saturation law[J]. Journal of Mathematical Physics, 1979, 20: 2692-2703

[3] Ruan W H. Asymptotic behavior and positive steady-state solutions of a reaction-diffusion model with autocatalysis and saturation law[J]. Nonlinear Analysis Theory, Method and Application, 1993, 21: 439-456

[4] Du Y H. Uniqueness multiplicity and stability for positive solutions of a pair of reaction-diffusion equations[J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh A, 1996, 126: 777-809

[5] Peng R, Shi J P, Wang M X. On stationary patterns of a reaction-diffusion model with autocatalysis and saturation law[J]. Nonlinearity, 2008, 21: 1471-1488

[6] Yi F Q, Wei J J, Shi J P. Bifurcation and spatio-temporal patterns in a diffusive homogenous predator-prey system[J]. Journal of Differential Equations, 2009, 246(5): 1944-1977

[7] Su Y, Wei J J, Shi J P. Hopf bifurcations in a reaction-diffusion population model with delay effect[J]. *Journal of Differential Equations*, 2009, 247(5): 1156-1184

[8] Wei J J, Li M Y. Hopf bifurcation analysis in a delayed Nicholson blowflies equation[J]. Nonlinear Analysis, 2005, 60: 1351-1367

[9] Hassard B D, Kazarinoff N D, Wan Y H. Theory and Application of Hopf Bifurcation[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1981

[10] Wiggins S. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos[M]. New York: Springer-Verlag, 1991

Hopf Bifurcation and Stability for an Autocatalytic System

MA Xiao-li

(Department of Mathematics and Physics, Xi'an Technological University, Xi'an 710032)

Abstract: This paper concerns a chemical model with an autocatalysis and saturation law. First, the subcritical Hopf bifurcation is obtained for the ordinary differential system and the induced periodic solutions are locally asymptotically stable. Then the diffusive model is considered. When the diffusive coefficients satisfy certain conditions, the subcritical Hopf bifurcation is also obtained and the spatially homogeneous periodic solutions are asymptotically stable. At last, numerical examples simulated with Matlab are shown to support and strengthen the analytical conclusions.

Keywords: autocatalysis; Hopf bifurcation; stability; diffusive terms

Received: 08 Sep 2009. **Accepted:** 26 May 2010.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10971124).